

Екзаменул уник де стат ла МАТЕМАТИКЭ

Варианта демонстративэ материалелор де апречиере а куноштинцелор пентру реализаря ын анул 2021 экзаменулуй уник де стат ла МАТЕМАТИКЭ

Експликаций ла варианта демонстративэ а материалелор де апречиере пентру ЕУС ла математикэ анулуй 2021

Варианта демонстративэ есте дестинатэ пентру а да о ынкипуире деспре структура виитоарелор материалеле де апречиере, деспре нумэрул де ынсэрчинэрь, деспре форма лор ши нивелул де комплекситате.

Ынсэрчинэриле вариантэй демонстративе ну рефлектэ тоате ынтребэриле концинутулуй, каре пот фи инклузе ын материалеле де апречиере ын анул 2021. Структура лукрэрий есте датэ ын спецификацие, яр листа ынтребэрилор – ын кодификаторий элементелор концинутулуй ши черинцелор кэтре нивелул прегэтирей а абсолвенцилор организациилор де ынвэцэмынт пентру а реализа экзаменул уник де стат ын анул 2021 ла математикэ.

Лукраря де экзаминаре есте форматэ дин доуэ пэрць, каре диферэ дупэ концинут, комплекситате ши нумэрул де ынсэрчинэрь. Критериул стабилит фиекэрей пэрць а лукрэрий есте форма ынсэрчинэрилор:

- партя 1 концине 11 ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 1–11) ку рэспунс скурт;
- партя 2 концине 4 ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 12–15) ку рэспунс скурт ши шае ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 16–21) ку рэспунс десфэшура.

Дупэ нивелул де комплекситате ынсэрчинэриле се репартизязэ ын фелул урмэтор: ынсэрчинэриле 1–11 ау нивел де базэ, ынсэрчинэриле 12–19 – нивел ридикат, ынсэрчинэриле 20 ши 21 се реферэ ла нивелул ыналт де комплекситате.

Ынсэрчинэриле примей пэрць сынт дестинате пентру детерминаря компетенцелор математиче але абсолвенцилор организациилор де ынвэцэмынт, че реализязэ програмеле ынвэцэмынтулуй женерал медиу (комплет) ла нивел де базэ.

Ынсэрчинаря ку рэспунс скурт (1-15) се сокоате ындеплинитэ, дакэ ын формуларул ку рэспунсурь № 1 есте фиксат рэспунсул корект ын формэ де нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ.

Ынсэрчинэриле 16–21 ку рэспунс десфэшура, динтре каре патру ынсэрчинэрь де нивел ридикат ши доуэ ынсэрчинэрь де нивел ыналт де комплекситате, сынт дестинате пентру о дефиренчиере май пречисэ а абитуриенцилор институциилор де ынвэцэмынт супериор.

Резолваря коректэ а фиекэрей дин ынсэрчинэриле 1-15 есте естиматэ ку ун пункт.

Резолваря коректэ фиекэрей дин ынсэрчинэриле 16 - 17 есте естиматэ ку 2 пункте; 18 ши 19 — 3 пункте; 20 ши 21 — 4 пункте. Пунктажул максимал примар пентру ындеплиниря лукрэрий – 33 пункте.

Пентру фиекаре ынсэрчинаре ку рэспунс десфэшура, инклузэ ын варианта демонстративэ, се пропуне о резолваре дин челе посибиле. Критерииле презентате де евалуаре пермит сэ ынцележець черинцеле привинд деплинэтатя ши коректитудиня резолвэрилор.

Варианта демонстративэ а материалелор де апречиере, системул де евалуаре, спецификация ши кодификаторий вор ажута сэ елабораць стратегия де прегэтире кэтре ЕУС ла математикэ.

Инструкциунь ла ындеплиниря лукрэрий

Лукраря де экзаминаре есте алкэтуитэ дин доуэ пэрць, инклузынд ын сине 21 де ынсэрчинэрь.

Партя 1 концине 11 ынсэрчинэрь ла нивел де базэ де комплекситате ку рэспунс скурт.

Партя 2 концине 4 ынсэрчинэрь ла нивел ридикат де комплекситате ку рэспунс скурт ши 6 ынсэрчинэрь ла нивел ридикат ши ыналт де комплекситате ку рэспунс десфэшурат.

Пентру ындеплиниря лукрэрий де экзаминаре ла математикэ се атрибуе 3 оре 55 минуте (235 минуте).

Рэспунсуриле ла ынсэрчинэриле 1–15 се скриу ын формэ де нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ.

Нумереле скриець ын кымпуриле рэспунсурилор ын текстул лукрэрий, яр апой ле трансфераць ын формуларул ку рэспунсурь №1.

Рэспунс: -0,8.

10	-	0	,	8															
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Ындеплининд ынсэрчинэриле 16–21 се чере де скрис резолваря комплетэ ши рэспунсул ын формуларул ку рэспунсурь № 2.

Тоате формулареле ЕУС се ындеплинеск ку чернялэ нягрэ апринсэ. Се пермите фолосиря пиксурилор капиларе, ку жел сау ку пеницэ.

Ла ындеплиниря ынсэрчинэрилор се поате фолоси макулаторул. Ынскриериле ын макулатор ну се яу ын консидерацие ла апречиеря лукрэрий.

Пунктеле, акумулаторе де кэтре Думнявоастрэ пентру ынсэрчинэриле ындеплините, се сумязэ. Стэруици-вэ сэ ындеплиниць кыт май мулте ынсэрчинэрь ши сэ акумулаць чел май маре пунктаж.

Вэ дорим сукчес!

Рэспунсул ла ынсэрчинэриле 1–11 есте нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ. Рэспунсул скриець ын **ФОРМУЛАРУЛ КУ РЭСПУНСУРЬ № 1** ын партя дряптэ де ла нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепынд ку примул пэтрэцел. Фиекаре цифрэ, семн минус ши виргулэ скриець ын пэтрэцел апарте ын кореспундере ку моделеле арэтате ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну есте нечесар де скрис.

Партя 1

1. Челе май симпле проблеме.

Ла библиотека университетэций ау адус мануале ной пентру трей курсурь, кыте 430 пентру фиекаре курс. Ын дулапул де кэрць сынт 6 рафтурь, пе фиекаре рафт ынкап 30 мануале. Де кыте дулапурь чел пущин есте невое, пентру а репартиза ын еле тоате мануалеле ной?

Резолваре.

Де тот ау адус $430 \cdot 3 = 1290$ де мануале. Ын дулапул де кэрць ынкап $30 \cdot 6 = 180$ де мануале. Ымпэрцим 1290 ла 180:

$$\frac{1290}{180} = \frac{129}{18} = 7\frac{1}{6}.$$

Деч, пентру а аранжа тоате кэрциле есте невое де 8 дулапурь.

Рэспунс: 8.

2. Проблема ла проченте.

Ла плэтиря сервисилор прин интермедиул терминалулуй комисия я 5%. Терминалул примеште суме мултипле ку 10 рубле. Аня дореште сэ пунэ пе контул телефонулуй сэу мобил ну май пучин де 400 де рубле. Че сумэ минималэ еа требуе сэ ынтродукэ ын диспозитивул де речепцие ал терминалулуй дат?

Резолваре.

Авынд ын ведере комисия, Аня требуе сэ ынтродукэ ын диспозитивул де речепцие о сумэ ну май микэ де $400 + 400 \cdot 0,05 = 420$ рубле. Верификэм, дакэ есте дестулэ сума датэ: 5% дин 420 руб. алкэтуеск 21 руб. (комисия), челе рэмасе 399 руб. се вор дуче пе контул телефонулуй. Ынсэ Аня а дорит сэ пунэ пе конт ну май пучин де 400 руб., прин урмаре, требуе сэ пунэ май мулт де 420 руб. Верификэм 430 руб.: комисия формязэ 21,5 руб., рэмын 408,5 руб. Дестул.

Рэспунс: 430.

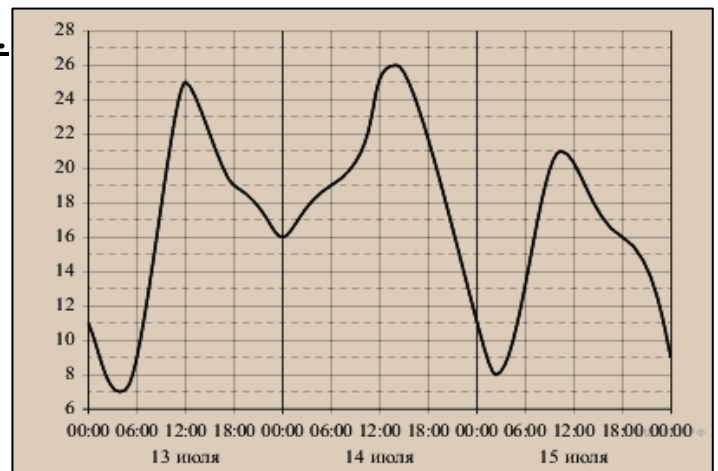
3. Читирия графичелор ши диаграмелор.

Пе десен се аратэ вариация температурий аерулуй пе паркурсул а трей zile. Пе оризонталэ се индикэ дата ши тимпул, пе вертикалэ – валоаря температурий ын граде Челсиус. Детерминаць дупэ десен диференца динтре чя май маре ши чя май микэ температурэ а аерулуй пе 15 юлие. Рэспунсул ыл даць ын граде Челсиус.

Резолваре.

Дин график се веде, кэ пе 15 юлие чя май маре температурэ алкэтуя $21\text{ }^{\circ}\text{C}$, яр чя май микэ $8\text{ }^{\circ}\text{C}$. Диференца лор формязэ $13\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Рэспунс: 13.



4. Лукрул ку формулеле.

Енергия конденсаторулуй ынкэркат W (ын Дж) се калкулязэ дупэ формула $W = \frac{q^2}{2C}$ унде C — капачитатя конденсаторулуй (ын Ф), яр q — ынкэркаря уней плэчь а конденсаторулуй (ын Кл). Афлаць енергия (ын Дж) ку капачитатя конденсаторулуй 10^{-4} Ф, дакэ ынкэркаря плэчий конденсаторулуй есте егалэ ку 0,0012 Кл.

Резолваре.

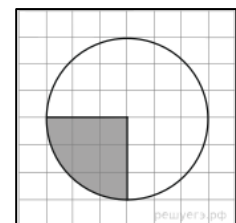
Афлэм енергия конденсаторулуй:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{0,0012^2}{2 \cdot 10^{-4}} = \frac{12^2 \cdot (10^{-4})^2}{2 \cdot 10^{-4}} = \frac{144 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-4}} = 72 \cdot 10^{-4} = 0,0072.$$

Рэспунс: 0,0072.

5. Рецяуа патратэ, планул де координате.

Пе о фоае ын пэтрэцеле ку дименсиуня пэтрэцелулуй $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ чм \times $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ чм есте дат ун черк. Афлаць ария секторулуй вопсит. Рэспунсул ыл даць ын центиметри патраць.



Резолваре.

Ария фигурий есте егалэ ку о пэтриме дин ария черкулуй, раза кэруй есте егалэ ку $\sqrt[3]{\pi}$ чм. Деачея

$$S = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}} \right)^2 = 2,25 \text{ чм}^2.$$

Рэспунс: 2,25.

6. Елементе але теорией пробабилитэцилор.

О фабрике продуце пошете. Ын медие 1 пошетэ дин 80 аре дефекте аскунсе. Гэсиць пробабилитатя, кэ пошета кумпэратэ ва фи фэрэ дефекте.

Резолваре.

Ын медие фэрэ дефекте продук 79 де пошете дин фиекаре 80, дин ачастэ каузэ пробабилитатя кэутатэ есте егалэ ку 0,9875.

$$\frac{79}{80} = 0,9875.$$

Рэспунс: 0,9875.

7. Екуаций симпле.

Резолваць екуация $\sqrt{6 + 5x} = x$. Дакэ екуация аре май мулте де о рэдэчинэ, ын рэспунс скриець чя май микэ динтре еле.

Резолваре.

Ридикэм ла патрат:

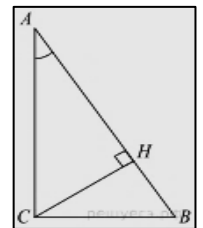
$$\sqrt{6 + 5x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 5x = x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 6, \end{cases} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Екуация аре о сингурэ рэдэчинэ, еа ши есте рэспунсул.

Рэспунс: 6.

8. Планиметрия: проблеме, легате ку унгиориле.

Ын триунгиул ABC унгиул C есте егал ку 90° , CH — ынэлцимя, BC = 8, $\sin A = 0,5$. Афлаць BH.



Резолваре.

Унгиориле A ши HCB сынт егале ка унгиорь ку латуриле речипрок перпендикуларе. Деачея $BH = BC \sin \angle HCB = BC \sin A = 8 \cdot 0,5 = 4$.

Рэспунс: 4.

9. Анализа графичелор ши диаграмелор.

Фиекэруй динтре челе патру графиче але функциилор дин прима енумераре ый кореспунде о валoare а дериватей а функцией $f(x)$ ын пункт ын а доуа енумераре. Фачець кореспонденца динтре графиче ши валориле дериватей.

ВАЛОРИЛЕ ДЕРИВАТЕЙ

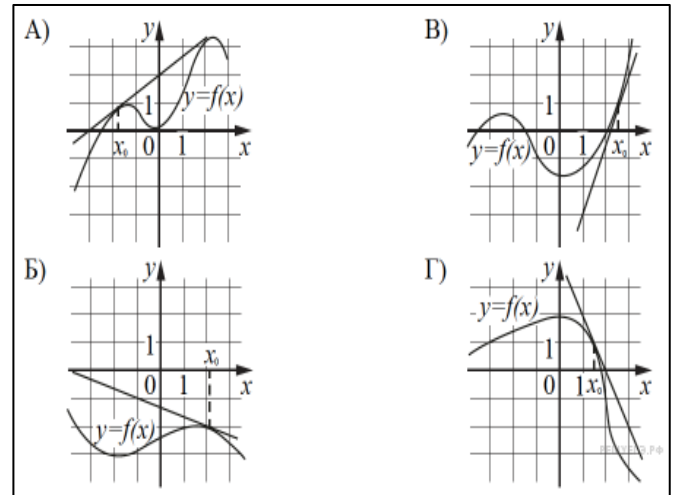
1) $-\frac{1}{3}$

2) -2

3) $\frac{2}{3}$

4) $\frac{5}{2}$

ГРАФИЧЕЛЕ



Скриець ын рэспунс чифреле, аранжынду-ле ын ординя, кореспунзэтор литерелор:

А	Б	В	Г

Лэмурире.

Валоаря дериватей ын пункт есте егалэ ку коефициентул унгулар ал тангентей, дусе ын пунктул дат. Есте позитив ши май мик декыт 1, дакэ танжента есте ынклинатэ кэтре ориентация позитивэ а аксей абсчиселор суб ун унгь май мик де 45° ; май маре декыт 1, дакэ унгул де ынклинацие есте май маре декыт 45° , ынсэ май мик декыт 90° . Есте негатив ши май мик декыт -1 , дакэ унгул де ынклинацие есте май маре декыт 90° , ынсэ май мик декыт 135° , есте негатив ши май маре декыт -1 , дакэ унгул де ынклинацие ал тангентей кэтре ориентация позитивэ а аксей абсчиселор есте май маре декыт 135° , ынсэ май мик декыт 180° . Астфел, графикулуй А ый кореспунде — 3, графикулуй Б — 1, графикулуй В — 4, графикулуй Г — 2. Рэспунс: 3142

10. Стереометрия.

Ынтр-о пирамидэ триунгуларэ регулатэ $SABC$ пунктул M – мижлокул мукий AB , S – вырфул. Се куноаште, кэ $BC = 3$, яр ария супрафаций латерале а пирамидей есте егалэ ку 45. Гэсиць лунжимя сегментулуй SM .

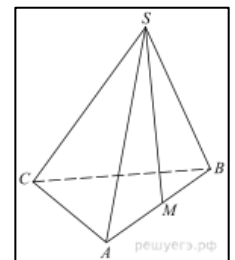
Резолваре.

Афлэм ария фаций SAB : $S_{SAB} = \frac{S_{\text{лат}}}{3} = \frac{45}{3} = 15$.

Сегментул SM есте медиана триунгулуй регулат SAB , деч, ши ынэлцимя луй. Атунч

$$SM = \frac{2S_{SAB}}{AB} = \frac{2S_{SAB}}{BC} = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10.$$

Рэспунс: 10.



11. Алежеря челей май буне опциунь.

Пентру а прегэти рафтурь пентру кэрць есте нечесар де командат 48 де стикле идентиче ын уна дин трей фирме. Ария фиекэрей стикле есте егалэ ку $0,25 \text{ м}^2$. Ын табел сынт дате прецуриле пентру стиклэ, прекум ши тэеря стиклей ши луструирия маржинилор. Кыте рублие ва коста чя май ефтинэ командэ?

Фирма	Прецул стиклей (руб. пентру 1 м ²)	Тэеря ши луструирия (руб. пентру о стиклэ)
<i>A</i>	420	75
<i>B</i>	440	65
<i>B</i>	470	55

Лэмурире.

Ария тоталэ а стиклей есте егалэ ку $48 \cdot 0,25 = 12 \text{ м}^2$. Прекэутэм диферите опциунь.

Костул комензий ла фирма *A* се адунэ дин прецул стиклей $420 \cdot 12 = 5040$ руб., прецул тэерий ши луструирий $75 \cdot 48 = 3600$ руб. ши есте егал ку 8640 руб.

Костул комензий ла фирма *B* се адунэ дин прецул стиклей $440 \cdot 12 = 5280$ руб., прецул тэерий ши луструирий $65 \cdot 48 = 3120$ руб. ши есте егал ку 8400 руб.

Костул комензий ла фирма *B* се адунэ дин прецул стиклей $470 \cdot 12 = 5640$ руб., прецул тэерий ши луструирий $55 \cdot 48 = 2640$ руб. ши есте егал ку 8280 руб.

Костул челей май ефтине комензь ва алкэтуи 8280 де рубле.

Рэспунс: 8280.

Ну уйтаць сэ трансфераць тоате рэспунсуриле ын формуларул ку рэспунсурь № 1

ПАРТЯ 2

Рэспунсул ла ынсэрчинэриле 12–15 требуе сэ фие нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ. Рэспунсул требуе скрис ын формуларул ку рэспунсурь № 1 ын партя дрянтэ де ла нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепынд ку примул пэтрэцел. Фиекаре цифрэ, семн минус ши виргулэ скриець ын пэтрэцел апарте ын кореспундере ку моделеле арэтамэ ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну есте нечесар де скрис.

12. Калкуле ши трансформэрь.

Гэсиць валоаря експресией $(1 - \log_5 40)(1 - \log_8 40)$.

Резолваре.

Ефектуэм трансформэрь:

$$(1 - \log_5 40) \cdot (1 - \log_8 40) = (1 - \log_5 (5 \cdot 8))(1 - \log_8 (8 \cdot 5)) = \\ = (1 - 1 - \log_5 8)(1 - 1 - \log_8 5) = -\log_5 8 \cdot (-\log_8 5) = 1$$

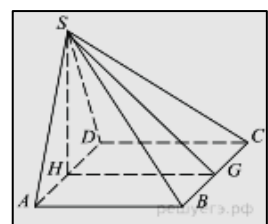
Рэспунс: 1.

13. Стереометрия

Базэ а уней пирамиде есте ун дрептунгь, о фацэ латералэ есте перпендикуларэ ла планул базей, яр челелалте трей феце латерале сынт ынклинате кэтре планул базей суб ун унгь де 60° . Ынэлцимя пирамидей есте егалэ ку 6. Афлаць волумул пирамидей.

Резолваре.

Аша кум фецеле латерале *SAB*, *SDC* ши *SBC* сынт ынклинате кэтре планул базей суб унгь де 60° , унгюриле *A* ши *D* ын триунгюл *ASD* ши унгюл *G* ын триунгюл *SGH* сынт егалэ ку 60° .



Деачея триунгюл ASD — екилатерал, яр латура луй есте легатэ ку ынэлцимя прин формула $AD = \frac{2}{\sqrt{3}}SH$, де унде $AD = 4\sqrt{3}$.

Дин триунгюл дрептунгик SHG гэсим:

$$HG = SH \operatorname{ctg} \angle SGH = 6 \operatorname{ctg} 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Аша кум $ABCD$ — дрептунг, ария луй есте егалэ ку продусул латурилор:

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB = AD \cdot HG = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24.$$

Рэмыне сэ афлэм волумул пирамидей:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48.$$

Рэспунс: 48.

14. Валоаря чя май маре ши чя май микэ а функцией

Гэсиць пунктул максим ал функцией $y = \ln(x + 5) - 2x + 9$.

Резолваре.

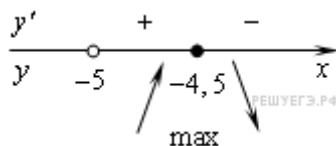
Функция есте дефинитэ ши дифференциабилэ пе $(-5; +\infty)$. Афлэм деривата функцией дате:

$$y' = \frac{1}{x+5} - 2.$$

Афлэм зероуриле дериватей:

$$\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x+5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -4,5.$$

Детерминэм семнеле дериватей функцией ши арэтэм пе десен компортаря функцией:



Пунктул максим кэутат есте $x = -4,5$.

Рэспунс: -4,5.

15. Проблеме текстуале.

Фамилия есте форматэ дин соц, социе ши фийка лор студентэ. Дакэ ляфа соцулуй с-ар фи мэрит де доуэ орь, венитул тотал фамилиал ар фи крескут ку 67%. Дакэ бурса фийчей с-ар фи микшорат де трей орь, венитул тотал ал фамилией с-ар фи микшорат ку 4%. Кыте проченте дин венитул тотал ал фамилией алкэтуеште ляфа социей?

Резолваре.

Кондиция «дакэ ляфа соцулуй с-ар фи мэрит де доуэ орь, венитул тотал фамилиал ар фи крескут ку 67%» ынсямнэ, кэ ляфа соцулуй алкэтуеште 67% дин венитул фамилией. Кондиция «дакэ бурса фийчей с-ар фи микшорат де трей орь, венитул тотал ал фамилией с-ар фи микшорат ку 4%», ынсямнэ, кэ $\frac{2}{3}$ дин бурсэ алкэтуеск 4% дин венитул фамилией, адикэ тоатэ бурса фийчей алкэтуеште 6% дин венитул фамилией. Ын аша мод, венитул мамей алкэтуеште $100\% - 67\% - 6\% = 27\%$ дин венитул фамилией.

Рэспунс: 27.

Пентру а скри резолвэриле ши рэспунсуриле ла ынсэрчинэриле 16-21 фолосиць **ФОРМУЛАРУЛ КУ РЭСПУНСУРЬ №2**. Скриець май ынтый нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините (16, 17 ши а.м.д.), яр аной резолваря комплетэ ку лэмурире ши рэспунсул. Рэспунсуриле скриець клар ши читец.

16. Екуаций, системе де екуаций

а) Резолваць екуация: $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$

б) Гэсиць тоате рэдэчиниле екуацией дате, че апарцин сегментулуй $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$

Резолваре.

а) $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \Leftrightarrow \cos x = \cos 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + 2\pi k, & k \in Z \\ 2x = -x + 2\pi k, & k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, & k \in Z \\ x = \frac{2\pi k}{3}, & k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$$

б) Гэсим тоате рэдэчиниле екуацией дате, че апарцин сегментулуй $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$:

$$\pi \leq \frac{2\pi k}{3} \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 6\pi \leq 4\pi k \leq 15\pi \Leftrightarrow 6 \leq 4k \leq 15 \Leftrightarrow 1,5 \leq k \leq 3,75$$

Астфел ынкыт $k \in Z$, атунч $k \in \{2; 3\}$

Дакэ $k = 2$, атунч $x = \frac{4\pi}{3}$.

Дакэ $k = 3$, атунч $x = 2\pi$.

Рэспунс: а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in Z$

б) $\frac{4\pi}{3}; 2\pi$

сау

а) Резолваць екуация: $5 \cdot 4^{x^2+4x+1} + 20 \cdot 10^{x^2+4x} - 7 \cdot 25^{x^2+4x+1} = 0$

б) Гэсиць тоате рэдэчиниле екуацией дате, че апарцин сегментулуй $[-3; 1]$

Резолваре.

а) $5 \cdot 4^{x^2+4x+1} + 20 \cdot 10^{x^2+4x} - 7 \cdot 25^{x^2+4x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2(x^2+4x+1)} + 2 \cdot (2 \cdot 5)^{x^2+4x+1} - 7 \cdot 5^{2(x^2+4x+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^{2(x^2+4x+1)} + 2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^{x^2+4x+1} - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{5} \right)^{x^2+4x+1} = 1; \\ \left(\frac{2}{5} \right)^{x^2+4x+1} = -\frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^{x^2+4x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$$

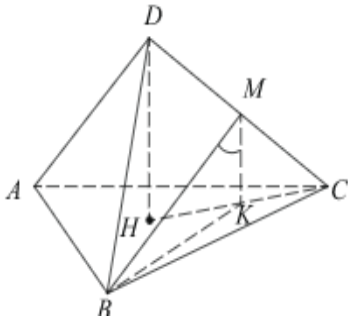
б) Естимэм $\sqrt{3}$ ку нумере ынтрежь: $1 < \sqrt{3} < 2$. Атунч $-1 < -2 + \sqrt{3} < 0$ ши $-4 < -2 - \sqrt{3} < -3$

Деч, сегментулуй $[-3; 1]$ ый апарцине нумай $x = -2 + \sqrt{3}$

- Рэспунс: а) $-2 \pm \sqrt{3}$;
 б) $-2 + \sqrt{3}$

17. Унгюрь ши дистанце ын спацуу

Ын тетраедрул регулат $ABCD$ гэсиць унгюл динтре ынэлцимя тетраедрулуй DH ши медиана BM феций латерале BCD .



Резолваре.

- 1) Аша кум BM – медиана феций латерале BCD , атунч M – мижлокул мукией CD . Прекэутэм триунгюл DHC – дрептунгик, аша кум DH – ынэлцимя тетраедрулуй, прин урмаре, $DH \perp (ABC)$. Ын триунгюл DHC дучем прин пунктул M линия медие MK . Дупэ проприетатя линей медий $MK \parallel DH$, деч, $MK \perp (ABC)$.
- 2) Аша кум $MK \parallel DH$, атунч $\angle(DH, BM) = \angle(MK, BM) = \angle BMK$
- 3) $MK \perp (ABC)$ ши $BK \subset (ABC)$, прин урмаре, $MK \perp BK$, адикэ триунгюл BMK – дрептунгик.
- 4) Аша кум тетраедрул $ABCD$ есте регулат, атунч тоате фецеле луй– триунгюрь регулате. Луэм лунжимя мукией тетраедрулуй егалэ ку a . Атунч фиекаре ынэлциме (медианэ, бисектоаре) а феций тетраедрулуй регулат ва фи егалэ ку $a \frac{\sqrt{3}}{2}$, адикэ $BM = a \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 5) Аша кум DH – ынэлцимя тетраедрулуй регулат, атунч H – чентрул триунгюлул регулат ABC , ши $CH = \frac{2}{3} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 6) Дин триунгюл дрептунгик DHC дупэ теорема луй Питагора гэсим DH : $DH = \sqrt{DC^2 - CH^2}$, де унде $DH = a \frac{\sqrt{6}}{3}$
- 7) Аша кум $MK \parallel DH$, атунч триунгюриле DHC ши MKC сынт асеменя, т.е. $\frac{MK}{DH} = \frac{MC}{DC}$. Примим: $MK = \frac{1}{2}DH$, сау $MK = a \frac{\sqrt{6}}{6}$
- 8) Ын триунгюл дрептунгик BMK гэсим косинусул унгюлул BMK :

$$\cos BMK = \frac{MK}{BM} \Rightarrow \cos BMK = \frac{a \frac{\sqrt{6}}{6}}{a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \angle BMK = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Рэспунс: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$

сау

Ынтр-о призмэ триунгюларэ регулатэ $ABCA_1B_1C_1$ латуриле базей сынт егале ку 1, мукииле латерале сынт егале ку 2, пунктул D — мижлокул мукией CC_1 . Гэсиць унгюл динтре планеле ABC ши ADB_1 .

Резолваре.

I методэ

- 1) Обсервэм, кэ A – пунктул комун ал планелор ABC ши ADB_1 , прин урмаре, планеле се интерсектязэ. Вом кэута дряпта де интерсекция. Ын планул BCC_1 афлэм пунктул K – пунктул де интерсекция ал дрептелор B_1D ши BC . Пунктул K – пунктул комун ал планелор ABC ши ADB_1 . Вом прими: AK – дряпта де интерсекция а планелор ABC ши ADB_1 .

2) Дин пунктул D коборым перпендикуларе ДН пе дряпта АК.

Обсервэм, кэ призма $ABCA_1B_1C_1$ есте регулатэ, деачея $DC \perp (ABC)$.

ДН – облика ла планул ABC. Атунч НС – проекция обличий DC пе планул ABC, дряпта АК се афлэ ын планул ABC. Дупэ конструкцие облика ДН есте перпендикуларэ ла дряпта АК. Атунч дупэ теорема челор трей перпендикуларе: $CH \perp AK$.

Авем: $CH \perp AK$ ши $CH \subset (ABC)$; $DH \perp AK$ ши $DH \subset (ADB_1)$, де унде урмязэ: $\angle(ABC; ADB_1) = \angle DHC$.

3) D — мижлокул мукией CC_1 ши $DC \parallel BB_1$, атунч DC – линия медиэ а триунгюлуй B_1BK , де унде: $BC = CK = 1$.

4) Аша кум призма есте регулатэ, атунч триунгюл ABC – регулат (екилатерал), адикэ $AB=BC=AC=1$ ши $\angle BCA = 60^\circ$. Атунч $\angle ACK = 120^\circ$ (дупэ проприетатя унгюрилор адиаченте).

5) Аша кум $CK=1$ ши $AC=1$, атунч триунгюл ACK – исосчел. Аша кум $\angle ACK = 120^\circ$, атунч $\angle AKC = 30^\circ$

6) $\angle AKC = 30^\circ$ ши $DH \perp AK$, атунч ын триунгюл дрептунгик СНК катета НС есте егалэ ку жумэтате дин ипотенузэ, адикэ $HC = \frac{1}{2}$

7) Прекэутэм триунгюл ДНС – дрептунгик, аша кум $DC \perp (ABC)$:

$$\operatorname{tg} DHC = \frac{DC}{HC} \Rightarrow \operatorname{tg} DHC = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \angle DHC = \operatorname{arctg} 2$$

Рэспунс: $\operatorname{arctg} 2$

Обсервэм, кэ рэспунсул поате фи скрис ын алтэ формэ: $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ сау $\arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5}$

II методэ

1) Фие О – мижлокул сегментулуй AC. Аша кум призма есте регулатэ, атунч триунгюл ABC – регулат ши $BO \perp AC$. Атунч $BO = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

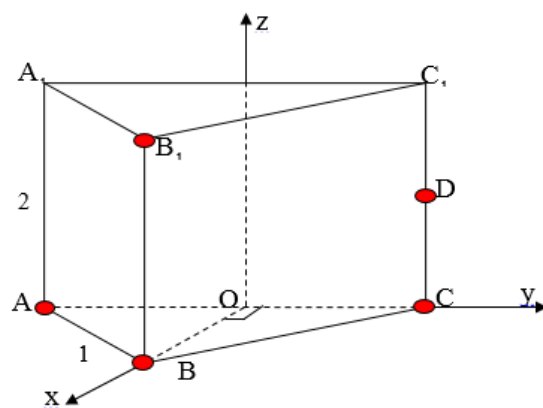
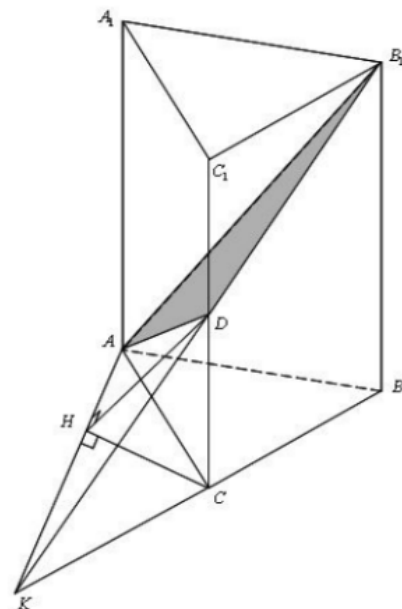
2) Ынтродучем системул дрептунгюлар де координате ку чентрул ын пунктул О, ориентындр акса абсчиселор де-а лунгул дрептей ВО, акса ордонателор – де-а лунгул дрептей ОС, акса апликателор – паралел дрептей AA_1 (везь десенулу).

Детерминэм координателе пунктелор А, В, С, D ши B_1 :

$$A(0; -\frac{1}{2}; 0); B(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0); C(0; \frac{1}{2}; 0); B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 2); D(0; \frac{1}{2}; 1)$$

3) Аша кум $CC_1 \parallel (ABC)$, атунч $\overline{CD}\{0; 0; 1\}$ – нормала ла планул ABC.

4) Алкэтуим екуация планулуй ADB_1 :



$$\begin{cases} 0a - \frac{1}{2}b + 0c = 1; \\ 0a + \frac{1}{2}b + c = 1; \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + 0b + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{3}; \\ b = -2; \\ c = 2 \end{cases}$$

Екуация планулуй ADB_1 : $-2\sqrt{3}x - 2y + 2z = 1$. Агунч $\vec{n}\{-\sqrt{3}; -1; 1\}$ – нормала планулуй ADB_1 .

$$5) \quad \cos(\widehat{ABC}; \widehat{ADB_1}) = \left| \cos(\widehat{CD}; \vec{n}) \right| = \left| \frac{0+0+1}{\sqrt{0+0+1} \cdot \sqrt{3+1+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Агунч } \angle(ABC; ADB_1) = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Рэспунс: } \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$$

18. Инекуаций, системе де инекуаций.

Резолваць системул де инекуаций:

$$\begin{cases} 4^{x+2} - 257 \cdot 2^x + 16 \leq 0, \\ 2 \log_2 \frac{x+2}{x-3,7} + \log_2(x-3,7)^2 \geq 2. \end{cases}$$

Резолваре.

Резолвэм прима инекуацие. Фачем субституция $y = 2^x$, авем:

$$16y^2 - 257y + 16 \leq 0 \Leftrightarrow (y-16)(16y-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \leq y \leq 16.$$

$$\text{Де аич примим солуция примеи инекуаций: } \frac{1}{16} \leq 2^x \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$$

Резолвэм инекуация а доуа. Примул термен есте детерминат пентру $\frac{x+2}{x-3,7} > 0$, адикэ пентру $x < -2$ сау $x > 3,7$. Трансформэм инегалитатя:

$$\log_2 \frac{(x+2)^2}{(x-3,7)^2} + \log_2(x-3,7)^2 \geq 2 \Rightarrow \log_2(x+2)^2 \geq 2 \Rightarrow (x+2)^2 \geq 4 \Rightarrow x(x+4) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Примим солуция инекуацией а доуа:

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ x > 3,7. \end{cases}$$

Солуцие а системулуй есте партя комунэ а солуциилор амбелор инекуаций: $x = -4$ сау $3,7 < x \leq 4$.

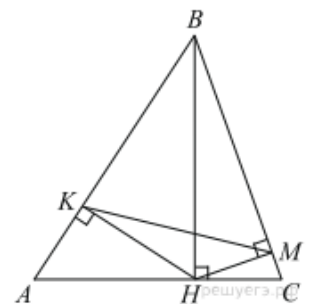
$$\text{Рэспунс: } \{-4\} \cup (3,7; 4].$$

19. Проблеме дин планиметрие

Ынтр-ун триунгь аскуцитунгик ABC ау дус ынэлцимя BH . Дин пунктул H пе латуриле AB ши BC ау коборыт перпендикуляреле HK ши HM кореспунзэтор.

а) Демонстраць, кэ триунгюл MBK есте асеменя ку триунгюл ABC .

б) Гэсиць релация арией триунгюлуй MBK кэтре ария патрулатерулуй $AKMC$, дакэ $BH = 1$, яр раза чиркумферинцей, чиркумскрисе триунгюлуй ABC , есте егалэ ку 4.



Резолваре.

а) Фие унгиол $\angle BAC = \alpha$. Унгиориле BAC ши KHB сынт егале, ка унгиорь ку латуриле речипрок перпендикуларе. Прекэутэм патрулатерул $BKHM$:

$\angle BKH + \angle BMH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, прин урмаре, патрулатерул $BKHM$ есте ынскрис ын чиркумферинцэ. Деч, $\angle KHB = \angle KMB$, ка ынскрисе, сприжините пе унул ши ачелаш арк. Ын аша мод, $\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB$. Триунгиориле ABC ши MBK ау унгиь комун B ши $\angle BAC = \angle KMB$, деч, ачесте триунгиорь сынт асеменя дупэ доуэ унгиорь.

б) Дин триунгиол дрептунгик BKH гэсим, кэ $BH = \frac{BK}{\sin \angle KHB}$. Центру триунгиол ABC аре лок егалитатя $2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$.

Цинынд конт, кэ $\angle KHB = \angle BAC$ примим: $\frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH}$. Латуриле BC ши BK — омолоаже ын триунгиориле асеменя ABC ши MBK , прин урмаре, коэффициентул лор де асемэнаре $k = \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = 8$. Гэсим релация арией триунгиолуй MBK кэтре ария патрулатерулуй $AKMC$:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AMKC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{64 - 1} = \frac{1}{63}.$$

Рэспунс: $\frac{1}{63}$.

20. Екуаций, инекуаций ши системеле ку параметри

Гэсиць тоате валориле луй a , пентру фиекаре динтре каре валоаря чя май маре а функцией $f(x) = |x - a| - x^2$ ну есте май микэ декыт 1.

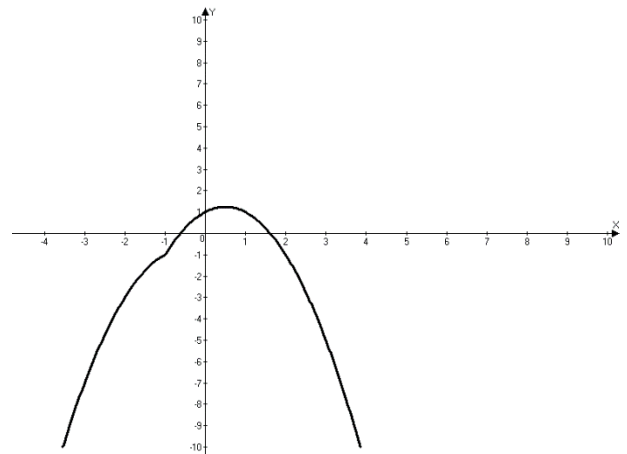
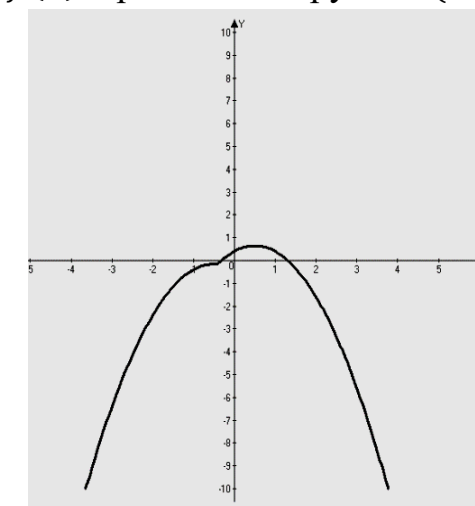
Резолваре.

Скрием функция датэ ын фелул урмэтор:

$$f(x) = \begin{cases} a - x - x^2 & \text{пентру } x < a, \\ x - a - x^2 & \text{пентру } x \geq a \end{cases}$$

Функция $f(x)$ есте континуэ пе тоатэ дряпта нумерикэ. Графикул ей констэ дин пэрциле а доуэ параболе, рамуриле кэрор сынт ориентате ын жос. Абчиселе вырфурилор параболелор сынт егале ку $x = -0,5$ ши $x = 0,5$.

Дакэ $a \in (-\infty; -0,5]$, атунч функция $f(x)$ креште пентру $x \in (-\infty; a)$, май департе прелунжеште сэ кряскэ пентру $x \in [a; 0,5]$ ши дескреште пентру $x \in [a; +\infty)$.



Прин урмаре, $f(x)$ атинже валоаря чя май маре ын уникул пункт $x = 0,5$. Гэсим, пентру че валорь але луй a , $a \in (-\infty; -0,5]$, валоаря чя май маре а функцией $f(x)$ ну есте май микэ декыт 1:

$$f(0,5) \geq 1 \Rightarrow 0,5 - a - (0,5)^2 \geq 1 \Rightarrow 0,25 - a \geq 1 \Rightarrow a \leq -0,75$$

Дакэ $a \in (-0,5; -0,5)$, атунч функция $f(x)$ атинже валоаря чя май маре ын пунктул $x = -0,5$ сау $x = 0,5$. Гэсим, пентру че валорь але луй a , $a \in$

$(-0,5; -0,5)$, чя май маре валoare а функцией $f(x)$ ну есте май микэ декыт 1:

$$\begin{cases} f(-0,5) \geq 1, \\ f(0,5) \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - (-0,5) - (-0,5)^2 \geq 1, \\ 0,5 - a - (0,5)^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 0,25 \geq 1, \\ 0,25 - a \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0,75, \\ a \leq -0,75 \end{cases}$$

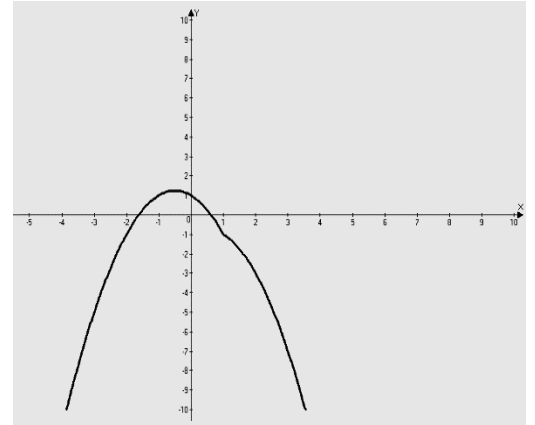
Прин урмаре, пентру $a \in (-0,5; -0,5)$ чя май маре валoare а функцией есте май микэ декыт 1.

Дакэ $a \in [-0,5; +\infty)$, атунч функция $f(x)$ атинже валoаря чя май маре ын уникул пункт $x = -0,5$.

Гэсим, пентру че валорь але луй a , $a \in [-0,5; +\infty)$, валoаря чя май маре а функцией $f(x)$ ну есте май микэ декыт 1:

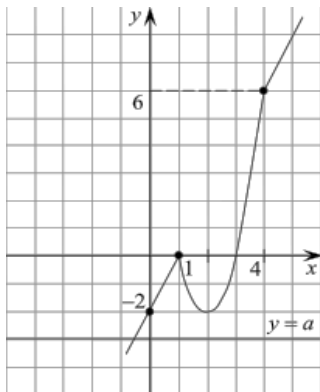
$$\begin{aligned} f(-0,5) \geq 1 &\Rightarrow a - (-0,5) - (-0,5)^2 \geq 1 \\ &\geq 1 \Rightarrow a - 0,25 \geq 1 \Rightarrow a \geq 0,75 \end{aligned}$$

Рэспунс: $a \in (-\infty; -0,75] \cup [0,75; +\infty)$



сау

Гэсиць тоате валориле луй a , пентру фиекаре динтре каре графикул функцией $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$ интерсектяэ акса абсчиселор май пущин декыт ын трей пункте диферите.



Резолваре.

Прекэутэм функция ажутэтоаре

$$g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|.$$

Графикул функцией $f(x)$ интерсектяэ акса абсчиселор ын доуэ сау май пущине пункте, дакэ екуация $g(x) = a$ аре май пущин де трей рэдэчинь диферите.

Дакэ $x \leq 1$ сау $x \geq 4$, атунч $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$. ши $g(x) = 2x - 2$.

Дакэ $1 < x < 4$, атунч $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$. ши $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Графикул функцией $g(x)$ констэ дин доуэ семидрепте ши аркул параболей. Пе десен се веде, кэ екуация $g(x) = a$ аре май пущин де трей рэдэчинь, нумай дакэ $a \leq g(2)$ сау $a \geq g(1)$, адикэ пентру $a \leq -2$ сау $a \geq 0$.

Рэспунс: $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$.

21. Нумереле ши проприетэциле лор.

Се поате де адус екземплу де чинч нумере натурале диферите, продусул кэроора есте егал ку 792 ши

а) чинч;

б) патру;

в) трей

динтре еле формязэ прогресие жеометрике?

Резолваре.

Обсервэм, кэ $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$.

а) Фие, кэ сынт a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 . Атунч продусул лор есте егал ку $a^5 q^{10}$: ши $aq^2 = \sqrt[5]{792} \notin \mathbb{Z}$.

б) Фие, кэ сынт a, aq, aq^2, aq^3, b ; q ну е облигатор сэ фие ынтрег, дар требуе сэ фие рационал. Фие $q = \frac{x}{y}$ — фракцие несимплификабилэ, атунч авем $\frac{a^4 x^6 b}{y^6} = 792$. Деч, 792 мултиплу ку x^6 (ну поате сэ се симплифиче ку нумиторул), де унде $x = 1$. Деч, a мултиплу ку y^3 (алтфел aq^3 —ну есте ынтрег), a^4 мултиплу ку y^{12} : 792 мултиплу ку y^6 (ну с-а симплификат), де унде $y = 1$ ши прогресия есте константэ.

в) Да, де екземплу 1,2,4,9,11.

Рэспунс: а) Ну; б) ну; в) да.